منطقة التكاملية :

تمرين :

نقول عن الحلقة $(A,+,\cdot)$ أنها منطقة تكاملية إذا كانت تبديلية ولا تملك قواسم للصفر ،

حيث نقول عن $a \in A^*$ أنه قاسم للصفر إذا وجد $b \in A^*$ حيث $a \cdot b = 0$

ملاحظة أن : 0 الصفر هو حيادي التابع الأول +

$A = A^*$ ماذا حيادي التابع +

أمثلة :

1- $(Z,+,\cdot)$ منطقة تكاملية .

لأن $(Z,+,\cdot)$ حلقة تبديلية

ولا تحوي قواسم للصفر والسبب لأنه لأجل $a \in Z^*$

يوجد $b = 0$ فقط ، بحيث $a \cdot b = 0$

2- $\left(\frac{Z}{6Z},+,\cdot\right)$ ليست منطقة تكاملية

لأن $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$

حيث

$\bar{2} \in \left(\frac{Z}{6Z}\right)^*$ ، $\bar{3} \in \left(\frac{Z}{6Z}\right)^*$ قاسمان للصفر

3- $\left(\frac{Z}{pZ},+,\cdot\right)$ حيث p عدد أولي (الحالة العامة)

منطقة تكاملية لأنها لا تحوي قواسم للصفر ، وهي حلقة تبديلية

مثال

$\left(\frac{Z}{5Z},+,\cdot\right)$ منطقة تكاملية (ولا تحوي قواسم للصفر)

$\bar{1} \cdot \bar{5} = \bar{5} = \bar{0}$

إذاً $\bar{1}$ ليست قاسم للصفر

$\bar{2}$ ليست قاسم للصفر لأنه

$\bar{2} \cdot (?) = \bar{0} \Leftarrow (?) = \bar{0}$

$\bar{3}$ ليست قاسم للصفر لأنه

$\bar{3} \cdot (?) = \bar{0} \Leftarrow (?) = \bar{0}$

$\bar{4}$ ليست قاسم للصفر لأنه

$\bar{4} \cdot (?) = \bar{0} \Leftarrow (?) = \bar{0}$

نتيجة :

$\frac{Z}{nZ}$ منطقة تكاملية $\Leftrightarrow$ n عدد أولي .

الحقل :

تعريف :

لتكن K مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل داخلي $(+)$ ، $(\cdot)$ ،

عندها نقول عن $(K,+,\cdot)$ أنها حقل إذا كان :

1- $(K,+)$ زمرة تبديلية حيادها 0

2- $(K^*,\cdot)$ زمرة حيث $K^* = K \setminus \{0\}$

3- $(\cdot)$ يتوزع على $(+)$

ملاحظة :

الحقل هو حلقة تبديلية ، واحدية ولكل عنصر مغاير للصفر مقلوب

أمثلة :

1- $(Z,+,\cdot)$ ليس حقل لأن :

$3 \in Z^*$ ولا تملك مقلوب

2- $(Q,+,\cdot)$ حقل لأن :

$(Q,+)$ زمرة تبديلية حيادها 0

$(Q^*,\cdot)$ زمرة تبديلية حيادها 1

الضرب توزع على الجمع

3- $\left(\frac{Z}{5Z},+,\cdot\right)$: حقل لأن :

(تعمم على أي عدد أولي بدل 5)

- $\left(\frac{Z}{5Z},+\right)$: زمرة تبديلية ... (نعود إلى جدول كيلي ورسمه وثبت أنه الزمرة تبديلية)

- $\left(\frac{Z}{5Z}\right)^*,\cdot)$ زمرة تبديلية لأن $\left(\frac{Z}{5Z}\right)^* = U_5 = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

(لا نرسم جدول كيلي لأنه)

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$				
$\bar{2}$				
$\bar{3}$				
$\bar{4}$				

- $(\cdot)$ يتوزع على $(+)$:

$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot (\overline{b+c})$

$= \overline{a \cdot (b+c)}$

$= \overline{a \cdot b + a \cdot c}$ ← الضرب يتوزع على + في Z

$= \overline{a \cdot b} + \overline{a \cdot c}$

$= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

انتهت المحاضرة